数理解析研究所講究録
228巻 1975年 61-74

$\mathbb{C}(X)$-空间のテンソル積

都立大 理学部 佐伯貞浩

$X_1, \cdots, X_N$ を有限個の局所コンパクト Hausdorff 空间とし，X をそれらの直積空间とする。$\mathbb{C}(X)$ で X 上の有界連続函数全体のなす Banach 代数を表わし，$\mathbb{C}_0(X) = \{ f \in \mathbb{C}(X) : f(\infty) = 0 \}$ とおく。いま projective norm ($= \gamma$-norm) に関する $\{\mathbb{C}(X_j)\}_1^N$ 及び $\{\mathbb{C}_0(X_j)\}_1^N$ の complete tensor product を考える：

$$V(X) = \mathbb{C}(X_1) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathbb{C}(X_N),$$
$$V_0(X) = \mathbb{C}_0(X_1) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathbb{C}_0(X_N).$$

従って $V(X)$ と $V_0(X)$ は semi-simple Banach 代数であり $V_0(X)$ の極大アイデール空间は X と同一視できる([11])。以後では $V_0(X) \subset V(X) \subset \mathbb{C}(X)$ と見なし，又自明性を避ける為にすべての X_j は無限集合と仮定する。

V_0-空间は抽象調和解析におけるある種の问題を考える場合に，有力な方法としてしばしば用いられる(例えば[15])。この V_0-空间の有用性は，それの $\mathbb{C}_0$-空间との類似性によるものではなく非類似性によるものである。従って非類似性に

ついては多くの文献があるが，類似性についてはあまり多くの事が知られていない 様に思われる。この小稿では，第1章でこれらの既知の結果に言及した後，第2章で V_0-空間と $\mathbb{C}_0$-空間の類似性について述べる。

第1章. V_0-空間と $\mathbb{C}_0$-空間の非類似性

この章では V_0-空間についての若干の結果を証明なしに述べる。最後の定理G以外は第2章では用いられない.

<u>定理A [13]</u>. $N \geq 2$ なら，$V_0(X)$ の作用函数は解析函数に限る。即ち区間 $[-1,1]$ 上で定義された函数 Φ について，次の2つの命題は同値である。

(a) $f \in V_0(X)$ & $f(X) \subset [-1,1] \Rightarrow \Phi \circ f \in V_0(X)$.

(b) Φ は $\mathbb{C}$ における $[-1,1]$ のある近傍に解析函数として拡張できる（X がコンパクトでない場合は更に $\Phi(0)=0$）.

<u>定理B</u>([5], [6], [12], [14]). 次の2命題は同値である。

(a) $V_0(X)$ のすべての閉イデール I は，その零集合

$$Z(I) = \{ x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in I \}$$

によって決定される。

(b) 高々1つを例外として全ての X_j は *scattered* である（即ち完全集合を含まない）.

<u>定理C（[8]）</u>．もし $N \geq 2$ であって少くも2つの X_j が完全集合を含むならば，$\exists\ f \in V_0(X)$ s.t.

$$(\mathrm{Re}\, f)^{n+1},\ (\mathrm{Im}\, f)^{n+1},\ f^m \bar{f}^n \quad (m, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で生成される $V_0(X)$ の閉アイデールはすべて異なる。

さて X の閉部分集合 E に対し

$$V_0(E) = \{ f|_E : f \in V_0(X) \} \subset \mathbb{C}_0(E)$$

とおき，これに quotient norm を入れると，$V_0(E)$ は E を極大アイデール空間として持つ Banach 代数になる。いま，次の様な函数列 $\sigma = \{f_n\}_1^\infty \subset V_0(E)$ が存在する様な $f \in \mathbb{C}_0(E)$ の全体を $\widetilde{V_0}(E)$ で表わす：

$$M_\sigma \equiv \sup_n \|f_n\|_{V_0(E)} < \infty \text{ かつ } \lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

すると $\widetilde{V_0(E)}$ は norm $\|f\|_{\widetilde{V_0(E)}} \equiv \inf_\sigma M_\sigma$ の下に Banach 代数となる。更に $f \notin \widetilde{V_0(E)}$ なら $\|f\|_{\widetilde{V_0(E)}} = \infty$ と定義すると，Hahn-Banach の定理より容易に分かる様に

$$\|f\|_{\widetilde{V_0(E)}} = \sup\left\{ \left|\int_E f\, d\mu\right| : \mu \in M(E),\ \|\mu\|' \leq 1 \right\}.$$

但し $\|\mu\|'$ は $V_0(E)$ 上の汎函数としての測度 μ の norm を表わす．

<u>定理D</u>. (a) $V_0(E) \neq \mathbb{C}_0(E)$ なら $\widetilde{V_0}(E) \neq V_0(E)$ であって，しかも $\widetilde{V_0}(E)$ は non-separable である（[16]).

(b) E が X で閉かつ開なら，imbedding $V_0(E) \subsetneq \widetilde{V_0}(E)$ は等長的である（[7],[16]).

(c) $N \geq 2$ とすると，$\widetilde{V_0}(X)$ に対する作用函数は，整函数に限る。従って $\widetilde{V_0}(X)$ は Banach代数として anti-symmetric である（[2]).

<u>定理E</u>（[18]). $N \geq 2$ であって少くも 2 つの X_j が完全集合を含むならば，$V_0(E)$ が $\widetilde{V_0}(E)$ で閉でない様なコンパクト集合 $E \subset X$ が存在する。

これら以外の $\widetilde{V_0}(E)$ についての結果については [9] 参照.

さて G をコンパクト可換群，$A(G) = \mathcal{F}[\ell^1(G)]$ を G 上の Fourier 代数とし，2 つの作用素

$$\mathbb{C}(G) \xrightarrow{\ M\ } \mathbb{C}(G \times G) \xrightarrow{\ P\ } \mathbb{C}(G)$$

を次の様に定義する:

$$(Mf)(x,y) = f(x+y),$$

$$(Pg)(x) = \int_G g(x-y,y)\,dy.$$

<u>定理F</u>([3]). M は $A(G)$ から $V(G\times G)$ への等長的準同型写像であって

$$M[A(G)] = \left\{ \varphi \in V(G\times G) : \begin{array}{l}\varphi(x,y) = f(x+y) \text{ for some} \\ f \in \mathbb{C}(G)\end{array} \right\}.$$

更に $P\circ M$ は $A(G)$ 上の恒等写像である.

<u>定理G</u>([10]). G を無限コンパクト可換群とすると, 測度の全体 $M(G\times G)$ は $V'(G\times G)$ でデンスではない.

<u>略証</u>. G が無限群である事により, $M(G)$ は $A'(G)$ でデンスではない([1]). 定理Fより, $A(G)$ を $V(G\times G)$ の closed subalgebra と見なす事が出来る。いま $\Phi \notin \overline{M(G)}$ なる $\Phi \in A'(G)$ を取り, Φ を $V'(G\times G)$ の元 $\hat{\Phi}$ に拡張する。もし $M(G\times G)$ が $V'(G\times G)$ でデンスなら,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \tilde{\mu}_\varepsilon \in M(G\times G) \text{ s.t. } \|\hat{\Phi} - \tilde{\mu}_\varepsilon\|_{V'} < \varepsilon.$$

そこで $\tilde{\mu}_\varepsilon$ の $A(G)$ 上への制限を μ_ε で表わすと, 明らかに $\mu_\varepsilon \in M(G)$ であって,

$$\|\Phi - \mu_\varepsilon\|_{A'(G)} \le \|\hat{\Phi} - \tilde{\mu}_\varepsilon\|_{V'(G\times G)} < \varepsilon.$$

こゝで $\varepsilon > 0$ は任意であるから, $\Phi \in \overline{M(G)}$ となり, これは矛盾である. Q.E.D.

第2章. V_0-空間と$\mathbb{C}_0$-空間の類似性

与えられたBanach空間 B に対し, X上の B-値有界函数の全体を $\ell^\infty(X;B)$で, 連続なる $f \in \ell^\infty(X;B)$ の全体を $\mathbb{C}(X;B)$で, $f(\infty)=0$ なる $f \in \mathbb{C}(X;B)$の全体を $\mathbb{C}_0(X;B)$で表わす。従って

$$V_D(X)\hat{\otimes} B = \ell^\infty(X_1)\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\ell^\infty(X_N)\hat{\otimes} B$$

は $\ell^\infty(X;B)$の部分空間と見なせる。

<u>定理1</u>([6]). 自然な *imbedding*

$$V_0(X)\hat{\otimes} B \hookrightarrow V_D(X)\hat{\otimes} B$$

は等長的であり, 又 $V_0(X)\hat{\otimes} B = \mathbb{C}_0(X;B)\cap[V_D(X)\hat{\otimes} B]$.

証明は自明でない. [6]を参照.

さて $M_c(X)$ を連続な測度 $\mu \in M(X)$ の全体, $M_d(X)$ を離散的測度の全体とすると, $M(X)$ は $M(X) = M_c(X) + M_d(X)$ と分解される。同様の分解が $V_0(X)'$に対しても成立する。

<u>定義</u>. $P \in (V_0(X)\hat{\otimes} B)'$とする.

(a) Pが *point-mass-like* であるとは, ある $x \in X$ と $\varphi \in B'$ に対し $P = \delta_x \otimes \varphi$ なる事をいう。

(b) Pが *discrete* であるとは, それが p.m.l.な元全体の *closed linear span* に属することをいう。

(c) P がある点 $x \in X$ で連続であるとは，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x$ の近傍 W s.t. $\forall F \in V_0(X)\hat{\otimes} B$，

$$\operatorname{supp} F \subset W \Longrightarrow |\langle F, P\rangle| \le \varepsilon \|F\|_{V_0(X)\hat{\otimes} B}.$$

もし P が X のすべての点で連続ならば，P は（X 上で）連続であるという。

最後に，Banach 空間 A が性質 $(\mathcal{P})$ を持つとは

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \forall (P_j)_1^\infty \subset A \text{ with } \|P_j\| \ge 1,\ \forall R > 0, \\ \exists (\alpha_j)_1^n \subset \mathbb{C} \text{ with } |\alpha_j| \le 1 \quad \text{s.t.} \\ \qquad \|\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n\| > R \end{cases}$$

定理 2（[10]）．Banach 空間 B の共役空間 B' は $(\mathcal{P})$ を満すものとする．しからば任意の $P \in (V_0(X)\hat{\otimes} B)'$ に対し

(i) 連続な P_c と discrete な P_d が一意的に存在して $P = P_c + P_d$．更に $\|P_d\| \le \|P\|$.

(ii) ある一意的な $\Phi \in \ell^\infty(X; B')$ が存在して，

$$\lim_{\mathcal{F}} \|P_d - \sum_{x \in E} \delta_x \otimes \Phi(x)\| = 0.$$

こゝに $\mathcal{F}$ は X のすべての有限直積集合（$E = E_1 \times \cdots \times E_N$）より成る有向集合を表わす（$E < F \Longleftrightarrow E \subset F$）．

これを証明するために，自明な方法により $V_0(X)\hat{\otimes} B$ を Banach $V(X)$-module と見なす。又 $\phi \in V(X)$ と $P \in [V_0(X)\hat{\otimes} B]'$ の積 $\phi P \in [V_0(X)\hat{\otimes} B]'$ を

$$\langle F, \phi P \rangle = \langle \phi F, P \rangle \qquad \forall\, F \in V_0(X)\hat{\otimes} B$$

で定義する。P の X-support とは，条件「$F \in V_0(X)\hat{\otimes} B$ が S のある近傍で 0 となるなら $\langle F, P\rangle = 0$」を満たす最小の閉集合 $S = S_X(P) \subset X$ であると定義する。

<u>補題</u>. B を上定理の通りとし，$P \in [V_0(X)\hat{\otimes} B]'$ と $x \in X$ を固定する。しからば，次の条件を満たす $P_x \in [V_0(X)\hat{\otimes} B]'$ が一意的に存在する：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x$ の近傍 W s.t.

$$\phi \in V(X),\ \operatorname{supp}\phi \subset W,\ \|\phi\|_{V(X)} < \varepsilon^{-1},\ \phi(x) = 1$$
$$\Longrightarrow \|\phi P - P_x\| < \varepsilon.$$

<u>証明</u>のアイデアを述べる。まず自然な考え方として，誰しも「$\forall \varepsilon > 0$, $\forall C > 0$, $\exists\, x$ の近傍 W s.t. $\phi_i \in V(X)$, $\operatorname{supp}\phi_i \subset W$, $\|\phi_i\|_{V(X)} < C$, かつ $\phi_i(x) = 1$ なら $\|\phi_1 P - \phi_2 P\| < \varepsilon$」を証明しようとするであろう。これは結論的には正しいが，直接の証明はうまく行かない。

そこで $x = (x_1, \cdots, x_N)$ と書いて

$$E_j = X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times \{x_j\} \times X_{j+1} \times \cdots \times X_N,$$
$$E = E_1 \cup \cdots \cup E_N \quad \text{とおく.}$$

そしてまず，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x$ の近傍 U_ε s.t.

$$(1) \quad \begin{cases} \phi \in V(X) \ \& \ \mathrm{supp}\,\phi \subset U_\varepsilon \setminus E \\ \qquad\qquad \Longrightarrow \ \|\phi P\| \leq \varepsilon \|\phi\|_{V(X)} \end{cases}$$

を背理法により証明する。こゝで仮定「B' は性質 (P) を持つ」が用いられるが，証明はやゝ複雑である。

次に (1) を用いて，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x$ の近傍 W_ε s.t.

$$(2) \quad \begin{cases} \phi \in V(X),\ \mathrm{supp}\,\phi \subset W_\varepsilon,\ \&\ \phi(x) = 0 \\ \qquad\qquad \Longrightarrow \ \|\phi P\| \leq \varepsilon \|\phi\|_{V(X)} \end{cases}$$

を証明する。これは $N=1$ の場合は (1) より直ちに示される。一般の場合は N に関する帰納法によるが，やはり証明は trivial ではない。

(2) を用いると，最初に述べた命題が容易に証明され，これより直ちに補題の結論を得る。　　　Q.E.D.

定理 3 ([10]). もし少くも一つの X_j が無限集合なら，

$$A \equiv [V_0(X) \hat{\otimes} B]'_c + [V_0(X) \hat{\otimes} B]'_d$$

が $[V_0(X) \hat{\otimes} B]'$ でデンスである為の必要十分条件は，B' が (P) を満たす事である。

略証. 定理 2 により，必要条件のみを示せばよい。また，$N = 1$ $(X = X_1)$ と仮定してよい。B' が (P) を満たさないとすると，ある $C < \infty$ と $(\Phi_k)_1^\infty \subset B'$ に対して，

(1) $\|\Phi_k\|_{B'} \geq 1 \quad \forall k$, & $\|\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Phi_k\|_{B'} \leq C \sup_k |\alpha_k|$.

こゝに $m \in \mathbb{N}$ と $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ は任意である。

仮定より可算集合 $E = \{x_k\}_1^\infty \subset X$ であって各 x_k が E で孤立点であるようなものが存在する。そこで

(2) $$P_m = \sum_{k=1}^{m} \delta_{x_k} \otimes \Phi_k \in [\mathbb{C}_0(X) \hat{\otimes} B]' \quad \forall m \geq 1$$

と定義すると，(1) より $\|P_m\| \leq C$. 従って $\{P_m\}_1^\infty$ は1つの weak-* cluster point $P \in [\mathbb{C}_0(X) \hat{\otimes} B]'$ を持つ。しかるに P は $\overline{A}$ に属さない事が示せる。　　　Q. E. D.

<u>補題</u>. $(S, \mathcal{B}, \lambda)$ を任意の測度空間，$M(S, \mathcal{B})$ を $\mathcal{B}$ 上の複素測度全体の作る Banach 空間とする。しからば $M(S, \mathcal{B})$ 及びすべての $L^p(S, \mathcal{B}, \lambda)$, $1 \leq p < \infty$ は (P) を満たす。

<u>略証</u>. $1 \leq p < \infty$ かつ $f_1, \cdots, f_m \in L^p$ とする。$\Omega = \Omega_m$ で $\varepsilon_k = \pm 1$ なるすべての $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)$ の全体を表わし，$\phi \in \mathbb{C}(\Omega)$ の平均値を

$$\mathcal{E}(\phi) = 2^{-m} \sum_\varepsilon \phi(\varepsilon)$$

で定義する。するとある定数 $C_p < \infty$ に対して，

(1) $$\left\{ \mathcal{E} \left|\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k f_k\right|^p \right\}^{1/p} \leq C_p \, \mathcal{E} \left|\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k f_k\right|$$

が成立する（[19 : Chap.V, p.213]）.

$1 \le p \le 2$ とすると, $(2/p)' = 2/(p-2)$ であるから

(2) $\quad \sum_1^n |f_k|^p \le n^{(2-p)/2} \left(\sum_1^n |f_k|^2 \right)^{p/2}$. (Hölder)

$$\text{よって} \quad n^{-(p-1)/p} \sum_1^n \|f_k\|_p \le \left(\sum_1^n \int |f_k|^p \, d\lambda \right)^{1/p} \quad (\;〃\;)$$

$$\le n^{(2-p)/2} \left\{ \int \left(\mathcal{E} \left| \sum_1^n \varepsilon_k f_k \right|^2 \right)^{p/2} d\lambda \right\}^{1/p} \quad (2)$$

$$\le C_2 \, n^{(2-p)/2} \left\{ \int \left(\mathcal{E} \left| \sum_1^n \varepsilon_k f_k \right| \right)^p d\lambda \right\}^{1/p} \quad (1)$$

$$\le C_2 \, n^{(2-p)/2p} \, \mathcal{E} \left\| \sum_1^n \varepsilon_k f_k \right\|_p \quad (\text{Minkowski}).$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n \|f_k\|_p \le C_2 \left\| \sum_1^n f_k \varepsilon_k \right\|_p \quad (1 \le p \le 2)$$

が少くも1つのεに対し成立する. 同様にして

$$\frac{1}{n^{(p-1)/p}} \sum_1^n \|f_k\|_p \le \left\| \sum_1^n \varepsilon_k f_k \right\|_p \quad (2 \le p < \infty).$$

従ってすべての L^p は $(\mathcal{P})$ を満す. $M(S, \mathcal{B})$ に対する結果は, L^1 に対する結果と Radon-Nikodym より出る。

<u>定理4</u>（[10]）. 次の3条件は同値である:

(a) 高々一つのX_jを除いてすべてのX_jは scattered である。

(b) $M(X)$ は $V_0(X)'$ でデンスである。

(c) $V_0(X)'$ は性質 $(\mathcal{P})$ を持つ。

<u>略証</u>. $N=1$ のときは, (c) は前補題の特別な場合であるから, 証明すべき事は何もない。 $N \ge 2$ のときは, (a) $\Rightarrow$ (b) は

定理2と前補題より，(b)⇒(a)は定理3と定理Gより，(a)⇒(c)は定理3より出る。(c)⇒(a)の証明は容易。

系1．$\mathcal{N}(X)$で，$\|f\|_{\mathcal{N}} = \sup_{E\in\mathfrak{F}} \|f\|_{V(E)} < \infty$なる$f\in \ell^\infty$の全体を表わす。このとき(i) $\mathcal{N}(X)$はnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$の下にBanach代数となり，(ii)もしすべてのX_jがscatteredであるならば，$\mathcal{N}(X)$は$V_0(X)''$と等長的に同型となる。

系2．もしすべてのX_jが離散的ならば

(i) 各$P\in V_0(X)'$に対し

$$\lim_{\mathfrak{F}} \| P - \sum_{x\in E} \langle \xi_{\{x\}}, P\rangle \delta_x \| = 0.$$

こゝにξ_AはAの定義函数とする。

(ii) $V_0(X)''$は$V_0(X)$のmultiplier全体の作るBanach代数と等長的に同型である。

この系は，$\mathbb{C}_0$-空間についての次の事実の類似である：Xを離散的空間とすると，(i) $\mathbb{C}_0(X)' = \ell^1(X)$，かつ(ii) $\ell^1(X)' = \ell^\infty(X)$は$\mathbb{C}_0(X)$のmultiplier全体と等長的に同型である。

以上の結果の詳しい証明及び抽象調和解析への応用については，[10]を参照されたい。

引 用 文 献

[1] C.F. Dunkl & D.E. Ramirez, Topics in harmonic analysis, Appleton-Century-Crofts, N.Y., 1971.

[3] S.C. Herz, Remarques sur la note précédente de M. Varopoulos, C.R. Acad. Sci. Paris, 260 (1955), 6001-6004.

[2] C. Graham, On a Banach algebra of Varopoulos, J. Func. Analy., 4 (1969), 317-328.

[4] J.-P. Kahane & Salem, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Paris: Hermann 1963.

[5] S. Saeki, Spectral synthesis for the Kronecker sets, J. M. S. Japan, 21 (1969), 549-563.

[6] ——, The ranges of certain isometries of tensor products ···, J. M. S. Japan, 23 (1971), 27-39.

[7] ——, Homomorphisms of tensor algebras, Tôhoku M. J., 23 (1971), 173-199.

[8] ——, Tensor products of Banach algebras and harm. analy., Tôhoku M. J., 24 (1972), 281-299.

[9] ——, On restriction algebras of tensor algebras, J. M. S. Japan, 25 (1973), 506-522.

[10] ——, Tensor products of C(X)-spaces and ···, submitted to J. M. S. Japan.

[11] J. Tomiyama, Tensor products of comm. Banach alg., Tôhoku M. J., 12 (1960), 147-154.

[12] N. Th. Varopoulos, Sur les ensembles parfaits et ····, C. R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965), 4668-4670.

[13] ——, ibid. 260 (1965), 5165-5168.

[14] ——, ibid. 260 (1965), 5997-6000.

[15] ——, Tensor algebra & harmonic analysis, Acta M., 119 (1967), 51-112.

[16] ——, On a problem of A. Beurling, Jour. Func. Analy., 2 (1968), 24-30.

[17] ——, Tensor algebras over discrete spaces, Jour. Func. Analysis, 3 (1969), 321-335.

[18] ——, Groups of cont. functions in harmonic analysis, Acta Math., 125 (1970), 109-154.

[19] A. Zygmund, Trigonometric series, Vol. I, Cambridge University Press, 1959.

1974年 9月 27日